Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE

Cinématique

Etude des mouvements sans se préoccuper des causes qui les provoquent. Au programme de CPGE, la cinématique est limitée aux mouvements des solides ou d'ensemble de solides (le solide est indéformable).
On sort du point de vue de la cinématique lorsque tous les mouvements relatifs (mouvement de S_i ***par rapport à*** S_j***) modélisés par leurs torseurs cinématiques sont déterminés en fonction des mobilités souvent notées*** $m = m_u + m_i$ ***ou couramment appelées paramètres cinématiques.***
La cinématique permet donc de déterminer les vecteurs positions, les vecteurs vitesses linéaire et angulaire et les vecteurs accélérations linéaire et angulaire des points d'un solide quelconque par rapport à un autre solide quelconque en fonction des mobilités du système mécanique.
Remarque importante : lors de l'étude cinématique, les mobilités ne sont pas connues, seule la dynamique permettra de les déterminer.

1 DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

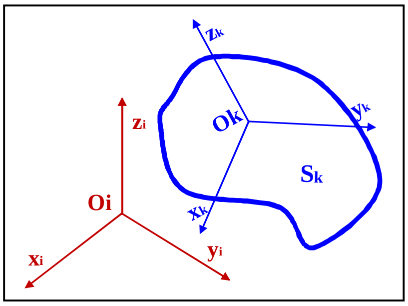
On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps et quel que soit sa position dans l'espace :

$$\forall A \in S \quad \text{et} \ \forall B \in S, \ \|\overrightarrow{AB}\| = cte \ \text{dans le temps et dans l'espace}$$

2 ÉQUIVALENCE REPÈRE – SOLIDE.

Un repère affine $\Re_k(O_k, \overrightarrow{x_k}; \overrightarrow{y_k}; \overrightarrow{z_k})$ est défini par une origine et trois vecteurs orthonormés directs. Les points extrémités des vecteurs unitaires sont à des distances constantes de leur origine (leur norme est égale à 1). Un repère affine est donc équivalent à un solide.

Par bijection, on associe donc un repère $R_k(\overrightarrow{x_k}; \overrightarrow{y_k}; \overrightarrow{z_k})$ orthonormé direct à un solide S_k.ou $\Re_k(O_k, \overrightarrow{x_k}; \overrightarrow{y_k}; \overrightarrow{z_k})$.



3 POSITIONNEMENT D'UN SOLIDE

La position d'un solide S_k par rapport à un repère R_i, dans un espace à trois dimensions, est définie par trois points non alignés donc par neuf paramètres. Ces trois points restent à des distances invariables les unes des autres. Il convient donc d'ajouter trois équations de liaison de ces paramètres.

La position d'un solide S_k par rapport à un repère R_i dépend donc de six paramètres indépendants.
Il est usuel en Mécanique de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_k dans le repère R_i,
- les trois angles qui définissent la position de la base du repère R_k par rapport à celle du repère R_i.

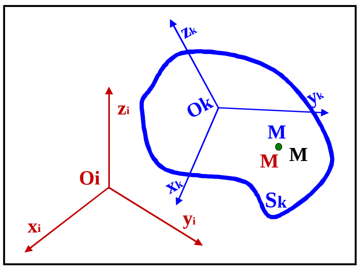
Les possibilités de variation de ces six paramètres correspondent aux possibilités de mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i.
Une possibilité de mouvement est appelée degré de liberté. Il existe donc au maximum six degrés de liberté (trois translations et trois rotations).

4 POINT COÏNCIDANT - VECTEUR-POSITION - TRAJECTOIRE

4.1 Point coïncidant

4.1.1 Définition

Un point M, appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère R_i, coïncide à chaque instant avec un point M appartenant au solide S_i. Ce point M est dit coïncident du point M à l'instant t.
M est appelé point mobile et M, noté $M_i(t)$ est appelé point coïncidant à l'instant t.
En clair, il sera nécéssaire de toujours savoir à quel solide, le point M qui nous préoccupe appartient.



 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

4.1.2 Notations utilisées

$\overrightarrow{V_{(M\in S_k/S_i)}}$, M appartient au solide S_k. la précision de notation est indiquée dans $\overrightarrow{V_{(M\in Rk/Ri)}}$ par $M \in S_k$. $\overrightarrow{V_{(M\in Rk/Ri)}}$ se lit : Vitesse du point M appartenant au solide S_k par rapport au solide S_i.

Le point Oi appartient au solide S_i, L'appartenance de Oi à S_i est moins visible mais est définie par la dérivée par rapport au temps d'un vecteur dans un repère Ri : $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{R_i}$. Dans cette notation, l'appartenance du point M n'est pas indiquée, alors attention. C'est pourquoi la notation complète suivant $\overrightarrow{V_{(M\in S_k/S_i)}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{R_i}$ est nécessaire.

4.2 Vecteur-position $\overrightarrow{O_iM}$

4.2.1 Définition

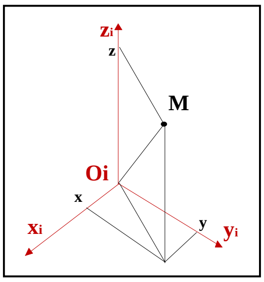
La position du point M, appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère de référence R_i, est variable avec le temps. Le vecteur $\overrightarrow{O_iM_i(t)}$, variable avec le temps, est appelé vecteur-position du point M relativement au repère R_i.

Attention, pour ne pas alourdir les notations, on note souvent $\overrightarrow{O_iM}$ sans spécifier l'appartenance de M.

4.2.2 Le paramétrage d'un point

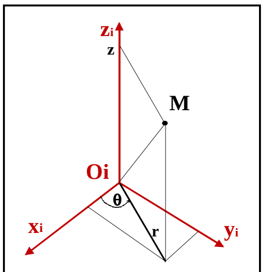
Remarque : Pour exprimer le vecteur-position dans le repère de référence, il faut utiliser le système de coordonnées adéquat

- coordonnées cartésiennes,



$$\overrightarrow{O_iM} = x.\vec{x}_i + y.\vec{y}_i + z.\vec{z}_i$$

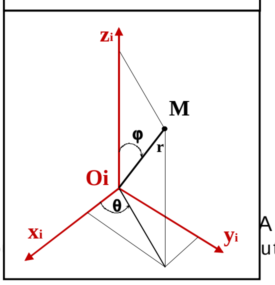
- coordonnées cylindriques



les coordonnées cylindriques du point M dans le repère $\Re_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ sont (r,θ,z)
ou en cartésiennes

$$\overrightarrow{O_iM} = r.\cos\theta..\vec{x}_i + r.\sin\theta.\vec{y}_i + z.\vec{z}_i$$

- coordonnées sphériques.



les coordonnées sphériques du point M dans le repère $\Re_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ sont (r,θ,φ)
ou en cartésiennes

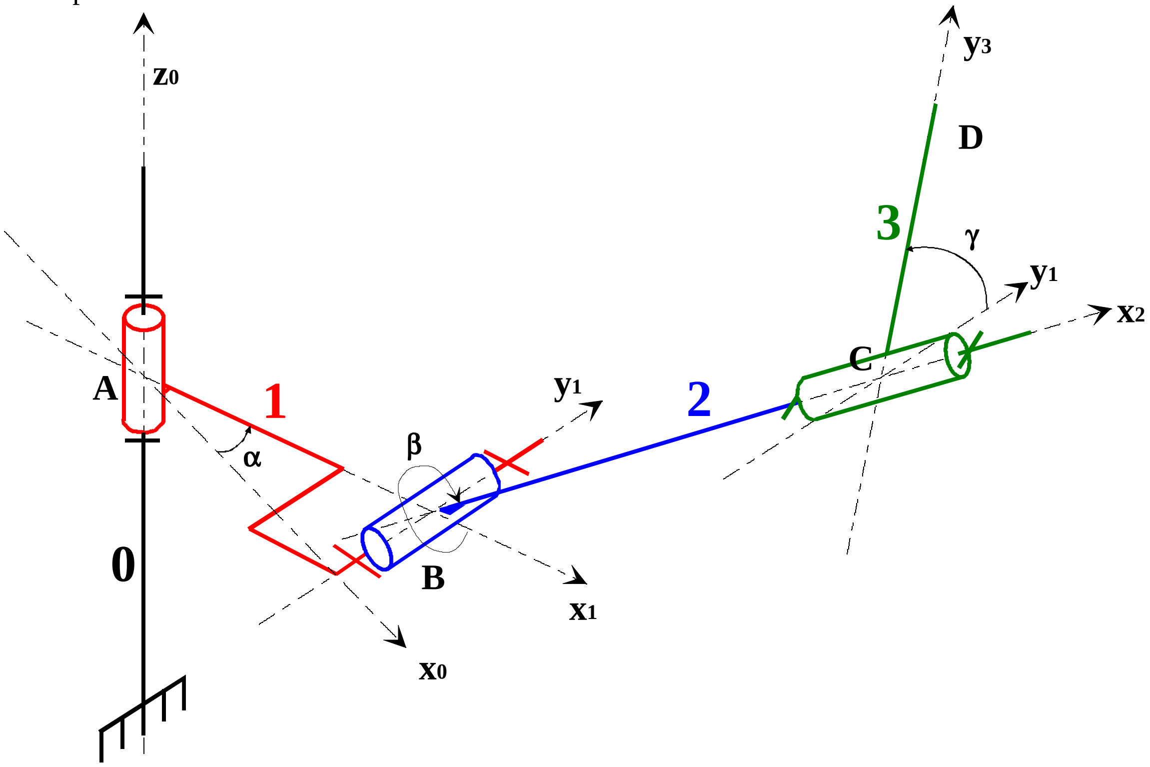
$$\overrightarrow{O_iM} = r.\sin\varphi.\cos\theta..\overrightarrow{x_i} + r.\sin\varphi.\sin\theta.\overrightarrow{y_i} + r.\cos\varphi.\overrightarrow{z_i}$$

4.2.3 Trajectoire d'un point par rapport à un repère

La trajectoire d'un point M d'un solide S_k en mouvement par rapport à un repère de référence R_i est l'ensemble des points $M_i(t)$ coïncidant à chaque instant avec le point M au cours du déplacement du solide S_k.

Attention, la trajectoire, extrémité du vecteur position dépend du repère ou solide de référence.

Exemple :



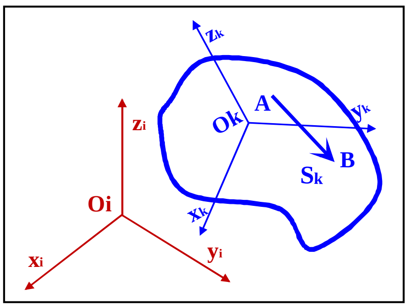
La trajectoire du point **B appartenant au solide 1** par rapport a**u solide 0** est un cercle de centre A et de rayon AB.

La trajectoire du point B **appartenant au solide 2** par rapport **au solide 1** est un point, le point B.

5 TORSEUR CINÉMATIQUE

5.1 Définition

En reprenant la définition d'un solide : $\overrightarrow{AB}^2 = cte$ et en dérivant cette équation scalaire par rapport au temps dans le repère $\mathfrak{R}_i(O_i, \overrightarrow{x_i}; \overrightarrow{y_i}; \overrightarrow{z_i})$ de base $R_i(\overrightarrow{x_i}; \overrightarrow{y_i}; \overrightarrow{z_i})$, on obtient :



$$\left(\frac{d\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{Ri} = 2.\overrightarrow{AB}.\left(\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{Ri} = 0$$

$$\overrightarrow{AB}.\left(\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{Ri} = 0$$ et par définition, on a :

$$\overrightarrow{V_{B\in Sk/Ri}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_iB}}{dt}\right)_{Ri} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{A\in Sk/Ri}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_iA}}{dt}\right)_{Ri} \quad \text{d'où}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{d\,\overrightarrow{AO_i}+\overrightarrow{O_iB}}{dt}\right)_{Ri} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_iB}}{dt}\right)_{Ri} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_iA}}{dt}\right)_{Ri}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{V_{B\in Sk/Ri}} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{V_{A\in Sk/Ri}}}$$

Le champ des vecteurs-vitesse pour un solide (et uniquement pour un solide) est équiprojectif.
D'après le théorème de DELASSUS, un champ équiprojectif est antisymétrique. Nous avons donc la relation :

Le champ des vecteurs-vitesse, pour tout point M d'un solide S_k par rapport à un repère R_i, s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M\in Sk/Ri}} = \overrightarrow{V_{A\in Sk/Ri}} + \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\overrightarrow{V_{M\in Sk/Ri}} = \overrightarrow{V_{Oi\in Sk/Ri}} + \overrightarrow{MO_i}\wedge\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}}$$

les composantes vectorielles du torseur modélisant ce champ antisymétrique de vecteurs s'écrivent au point A et M :

$$\left\{V_{Sk/Ri}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}} \\ \overrightarrow{V_{A\in Sk/Ri}}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}} \\ \overrightarrow{V_{M\in Sk/Ri}} = \overrightarrow{V_{A\in Sk/Ri}} + \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}\end{matrix}\right\}_M$$

Ce torseur est appelé torseur cinématique du mouvement du solide S_k par rapport au repère R_i
Ce torseur modélise la cinématique du solide S_k par rapport au repère R_i.
Le torseur cinématique est défini à tout instant.

$\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}$: vecteur taux de rotation de S_k par rapport au repère R_i est la coordonnée somme du torseur cinématique modélisant le mouvement du solide S_k par rapport au repère R_i.

$\overrightarrow{V_{A\in Sk/Ri}}$: vecteur vitesse du point A appartenant au solide S_k par rapport au repère R_i est la coordonnée moment du torseur cinématique modélisant le mouvement du solide S_k par rapport au repère R_i.

Attention :
Le champ des vecteurs-accélération, pour tout point M appartenant au solide S_k par rapport à un repère R_i, n'est pas équiprojectif. Ce n'est donc pas un champ de moments de torseurs. (voir cinématique du point)

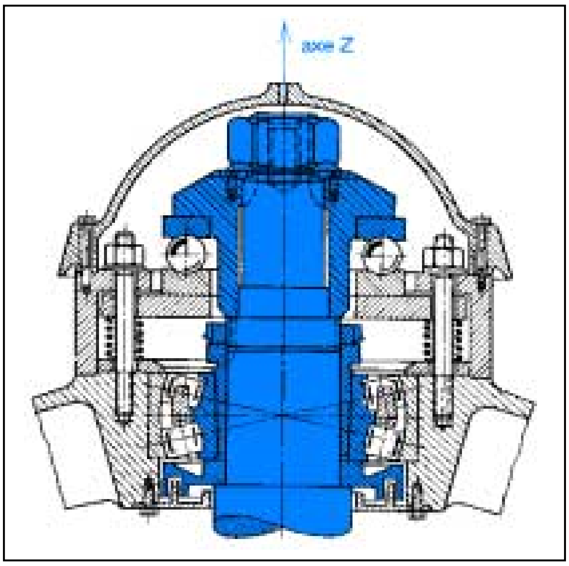
5.2 Axe central du torseur cinématique

L'axe central du torseur cinématique est encore appelé **axe de viration.** Cet axe central (voir "Les outils utiles en mécanique")

- est le lieu des points I tel que $\overrightarrow{V_{I\in Sk/Ri}}\wedge\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}} = \vec{0}$,
- existe si $\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}} \neq \vec{0}$
- est obtenu par la relation : $\overrightarrow{AI} = -\dfrac{\overrightarrow{V_{M\in Sk/Ri}}\wedge\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}}{\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}^{2}} + \lambda.\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}$, avec λ réel quelconque.
- est le lieu des points où les modules des vecteurs-vitesse sont minimaux.

6 MOUVEMENTS DE SOLIDES PARTICULIERS

6.1 Mouvement d'un solide S_k en rotation par rapport à un solide S_i.



Toutes les pièces en liaison complète (pas de mouvement relatif entre elles) avec l'arbre, ici colorié en bleu ci-contre, forment un solide S_k par hypothèse de non déformation des différentes pièces constituant cette ensemble.
Le solide S_k est en rotation par rapport au bâti S_i non colorié. L'axe de l'arbre z est l'axe de rotation.
Cette liaison est réalisée par une butée à billes et un roulement sphérique à double rangées de rouleaux.

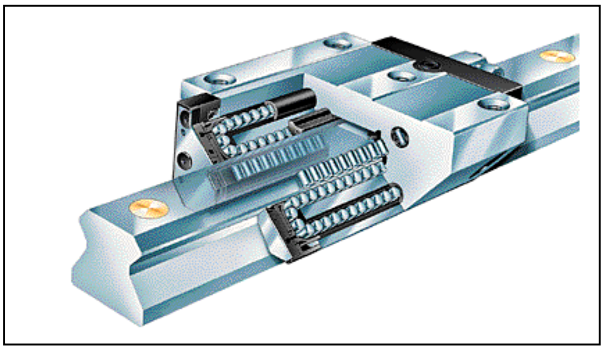
En tout point de l'axe de l'arbre, le torseur cinématique de S_k par rapport à S_i s'écrit :

$$\left\{ V_{Sk/Ri} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$$

, ce torseur est donc un glisseur donc l'axe central est l'axe $A,\vec{z}$.

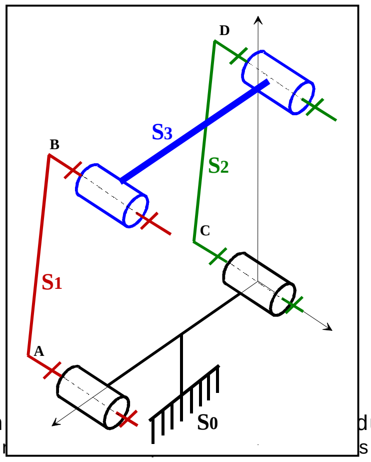
Conclusion :
Un torseur glisseur cinématique modélise un mouvement de rotation d'un solide autour de son axe central, et un mouvement d'un solide en rotation est modélisé par un torseur cinématique glisseur d'axe central l'axe de rotation du solide.

6.2 Mouvement d'un solide S_k en translation par rapport à un solide S_i.



Glissière INALineartechnichnik oHG

Soit la représentation schématique d'un mécanisme à chaîne fermée tel que les conditions géométriques sont les suivantes : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
On montrera dans la suite de ce document que la cinématique du solide S_3 par rapport au solide S_0 est une translation circulaire d'où : $\overrightarrow{V_{B\in S3/S0}} = \overrightarrow{V_{D\in S3/S0}}$ (tout point M de S_3 a pour vitesse par rapport au solide S_0 : $\overrightarrow{V_{B\in S3/S0}}$.



Le torseur cinématique de S_3 par rapport à S_0 s'écrit :

$$\left\{V_{S3/R3}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{B\in S3/S0}} \end{Bmatrix}_B$$, ce torseur est donc un torseur couple

Ce torseur n'a pas d'axe central.

Conclusion :
Un torseur couple cinématique modélise un mouvement d'un solide en translation, et une translation (rectiligne ou curviligne) d'un solide est modélisée par un torseur couple.

6.3 Composition de mouvements

6.3.1 Définition

Soit le torseur cinématique modélisant le mouvement du solide S_1 par rapport au solide S_0, dont les éléments de réduction s'écrivent au point A :

$$\left\{V_{S1/S0}\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S1/S0}} \end{Bmatrix}_A$$

Soit le torseur cinématique modélisant le mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_1, dont les éléments de réduction s'écrivent au point A :

$$\left\{V_{S2/S1}\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S2/S1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S2/S1}} \end{Bmatrix}_A$$

Et comme par on a les relations : $\overrightarrow{V_{A\in S2/S0}} = \overrightarrow{V_{A\in S2/S1}} + \overrightarrow{V_{A\in S1/S0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} = \overrightarrow{\Omega_{S2/S1}} + \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}$ alors on obtient :

$$\left\{V_{S2/S1}\right\} + \left\{V_{S1/S0}\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S2/S1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S2/S1}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S1/S0}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S2/S1}} + \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S2/S1}} + \overrightarrow{V_{A\in S1/S0}} \end{Bmatrix}_A = \left\{V_{S2/S0}\right\}$$

On obtient la composition des mouvements modélisée par la somme torseurielle ci- dessous :

$$\left\{V_{S2/S0}\right\} = \left\{V_{S2/S1}\right\} + \left\{V_{S1/S0}\right\}$$

6.3.2 Utilisation de la composition des mouvements

6.3.2.1 Objectif

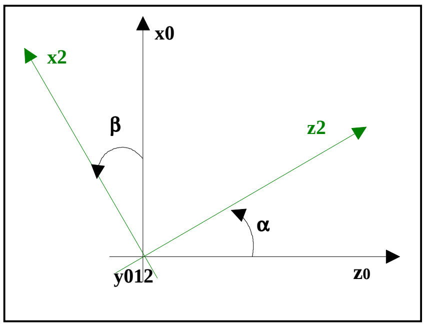
Montrons que la cinématique du solide S_3 par rapport au solide S_0 est une translation circulaire.

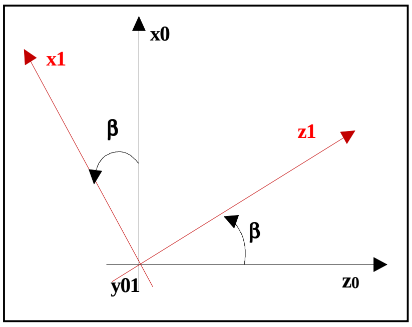
6.3.2.2 Traduction de la cinématique du mécanisme

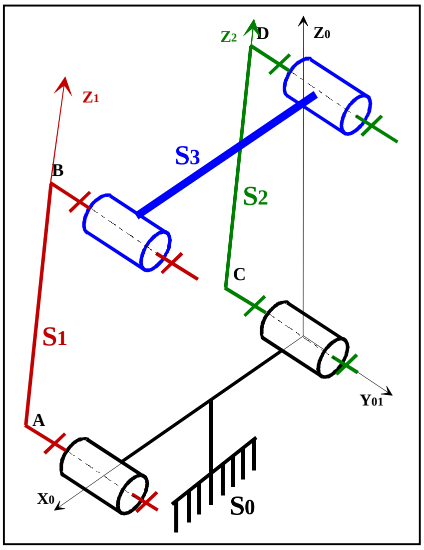
On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = b\vec{z}_1$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = c\vec{x}_0$.

et en posant :

$$\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} = \dot{\beta}.\vec{y}_{01} \;;\; \overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} = \dot{\alpha}.\vec{y}_{012}$$







- $$\{V_{S1/S0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

- $$\{V_{S2/S0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S2/S0}} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} \end{Bmatrix}_A$$

- $$\{V_{S3/S1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S3/S1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S3/S1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S3/S1}} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S3/S1}} \end{Bmatrix}_A$$

- $$\{V_{S3/S2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S3/S2}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S3/S2}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S3/S2}} = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S3/S2}} \end{Bmatrix}_A$$

par composition de mouvement, on obtient :

$$\{V_{S0/S1}\} + \{V_{S1/S3}\} + \{V_{S3/S2}\} + \{V_{S2/S0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

En sommant les torseurs au point A, on obtient :

$$-\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A-\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S3/S1}}\\ \overrightarrow{V_{A\in S3/S1}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S3/S1}}\end{Bmatrix}_A+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}\\ \overrightarrow{V_{A\in S3/S2}}=\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}\end{Bmatrix}_A+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}}\\ \overrightarrow{V_{A\in S2/S0}}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}}\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$$

et avec $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

$$-\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A-\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S3/S1}}\\ \overrightarrow{V_{A\in S3/S1}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S3/S1}}\end{Bmatrix}_A+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}\\ \overrightarrow{V_{A\in S3/S2}}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\wedge\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}\end{Bmatrix}_A$$

$$+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}}\\ \overrightarrow{V_{A\in S2/S0}}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}}\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{Bmatrix}-\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}-\overrightarrow{\Omega_{S3/S1}}+\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}+\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}}\\ -\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S3/S1}}+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\wedge\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}}\end{Bmatrix}_A$$

$$=\begin{Bmatrix}-\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}-\overrightarrow{\Omega_{S3/S1}}+\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}+\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}}\\ \overrightarrow{AB}\wedge\left(-\overrightarrow{\Omega_{S3/S1}}+\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}\right)+\overrightarrow{AC}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}}+\overrightarrow{\Omega_{S3/S2}}\right)\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$$

d'où en projetant,

$$\begin{array}{c|c}&0\\&0\\R1&b\end{array}\wedge\begin{array}{c|c}&0\\&\dot\beta-\dot\alpha\\R1&0\end{array}=\begin{array}{c|c}&0\\&0\\R0&c\end{array}\wedge\begin{array}{c|c}&0\\&\dot\theta_{03}\\R0&0\end{array}\Leftrightarrow -b.(\dot\beta-\dot\alpha)\vec{x}_1=-c.\vec{z}_0\Leftrightarrow\begin{cases}-b.(\dot\beta-\dot\alpha)\cos\beta=0\\-b.(\dot\beta-\dot\alpha)\sin\beta=\dot\theta_{03}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot\beta=\dot\alpha\\ \dot\theta_{03}=0\end{cases}$$

Conclusion :

$\overrightarrow{\Omega_{S3/S0}}=\vec{0}$, ce qui implique puisque $\overrightarrow{V_{B\in S3/S0}}=\underbrace{\overrightarrow{V_{B\in S3/S1}}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{V_{B\in S1/S0}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}\neq\vec{0}$ que le torseur cinématique est un couple : $\{V_{S3/S0}\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}\end{Bmatrix}_A$